⋆

Exercice 1

Le but de cet exercice est de démontrer la formule du terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique n'admet pas de solution réelle.

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites numériques. On admet que cet ensemble muni de la somme et du produit défini ci-dessous est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

$$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \lambda \cdot (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

On considère deux réels a et b tels que l'équation $r^2 = ar + b$ n'admet aucune solution réelle, et on s'intéresse à l'ensemble F de toutes les suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2) Soit φ l'application de F vers $\mathbb{R}^2$ par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$$

   a) Montrer que φ est injective.
   b) Montrer que φ est surjective.
   c) En déduire que $\dim(F) = 2$.
3) On cherche maintenant à déterminer une base de F.
   Soient $r_1 = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$ et $r_2 = \rho\,\mathrm{e}^{-i\theta}$ les deux solutions complexes de l'équation $r^2 = ar + b$, avec $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
   On pose, pour tout entier naturel n :

$$x_n = \rho^n \cos(n\theta) \quad \text{et} \quad y_n = \rho^n \sin(n\theta)$$

   a) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans F.
   b) Montrer que $((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une famille libre de F.
   c) En déduire que $((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une famille génératrice de F.
4) En déduire que pour toute suite numérique (u_n) vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

   il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda\rho^n \cos(n\theta) + \mu\rho^n \sin(n\theta)$$

⋆ ⋆

Exercice 2

Le but de cet exercice est de retrouver un résultat du cours sur les racines n-èmes de l'unité.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche tous les nombres complexes z tels que $z^n = 1$ en raisonnant par analyse-synthèse.

1) On suppose dans cette question que z est un nombre complexe vérifiant $z^n = 1$. On rappelle qu'il existe un réel $\rho > 0$ et un réel θ tels que $z = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta} = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.
   a) Montrer que $|z|^n = 1$ puis que $\rho = 1$.
   b) Justifier que $n\theta$ est un multiple de 2π. En déduire qu'il existe un entier relatif m tel que $\theta = \dfrac{2m\pi}{n}$.
   c) Montrer qu'il existe un entier k dans $\{0, ..., n-1\}$ tel que $m - k$ est un multiple de n. On pourra utiliser la division euclidienne de m par n.
   d) En déduire que z peut s'écrire :

$$z = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

   avec k un entier dans $\{0, ..., n-1\}$.
2) On suppose dans cette question que $z = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, ..., n-1\}$. Vérifier que $z^n = 1$.

3) Application : soit $c = 3 - 4i$. On cherche l'ensemble des nombres complexes z tels que $z^5 = c$.
   a) Déterminer $\rho > 0$ et θ deux réels tels que $c = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$.
   b) On pose $\omega = \rho^{\frac{1}{5}}\,\mathrm{e}^{\frac{i\theta}{5}}$. Vérifier que :
$$z^5 = c \Longleftrightarrow \left(\frac{z}{\omega}\right)^5 = 1$$
   c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $z^5 = c$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 3

(oraux ENS 2018)

Soit $k \geq 2$ un entier et $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{k}}$

1) Soit $j \geq 0$ un entier. Si j est un multiple de k, que vaut ω^j ?
2) Pour tout entier $0 \leq \ell \leq k-1$, montrer que $|1+\omega^\ell| = |\omega^{-\ell/2} + \omega^{\ell/2}| = 2\left|\cos\left(\frac{\pi\ell}{k}\right)\right|$
3) Soit $j \geq 0$ un entier. Calculer la quantité
$$\sum_{\ell=0}^{k-1} \omega^{\ell j}$$
suivant si j est un multiple de k ou non.
4) Montrer que :
$$\sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ multiple de } k}} \binom{n}{j} = \frac{1}{k}2^n + \frac{1}{k}\sum_{\ell=1}^{k-1}(1+\omega^\ell)^n$$
5) Soit X_n le nombre de piles obtenus dans une succession de lancers indépendants d'une pièce équilibrée. Montrer que la probabilité que X_n soit un multiple de k converge lorsque $n \to +\infty$ et calculer la limite.

⋆

Exercice 4

Pour chacune des fonctions suivantes, montrer que c'est une fonction de répartition d'une variable à densité X, et préciser une densité de X :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \dfrac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}$
2) Soit $A > 0$ un réel fixé et $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x}{A}\right)^n & \text{si } x \in [0, A] \\ 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > A \end{cases}$
3) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sin\left(\dfrac{\pi\,\mathrm{e}^x}{2 + 2\,\mathrm{e}^x}\right)$
4) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^2 - 1} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

⋆ ⋆

Exercice 5

1) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x + \ln^2(x)}{2^x}\,\mathrm{d}x$ converge.
2) En déduire qu'il existe un réel $\gamma > 0$ tel que la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \begin{cases} \gamma \times \dfrac{x + \ln^2(x)}{2^x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ est une fonction densité de probabilité.
3) Soit X une variable aléatoire à densité de densité f. Montrer que X admet une espérance et une variance (on ne demandera pas de les calculer).

Exercice 6

1) Montrer que pour tout réel x, $\lfloor x+\frac{1}{2}\rfloor = -\lfloor -x+\frac{1}{2}\rfloor$
2) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(\lfloor x+\frac{1}{2}\rfloor)^4}\,\mathrm{d}x$ converge.
3) En déduire qu'il existe un réel α tel que la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{\alpha}{1+(\lfloor x+\frac{1}{2}\rfloor)^4}$ est une fonction densité de probabilité.
4) Soit X une variable aléatoire à densité de densité f.
   a) Justifier que X admet une espérance et déterminer $E(X)$ sans calcul.
   b) Justifier que X admet une variance, puis montrer que :

$$V(X) \geq 2\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+\left(x+\frac{1}{2}\right)^4}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 7

Soit c un réel et soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{1+x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1) Déterminer c tel que f soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire.
2) Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que $Y = \dfrac{1}{X} - \left\lfloor \dfrac{1}{X} \right\rfloor$ est une variable à densité qui suit la même loi que X.